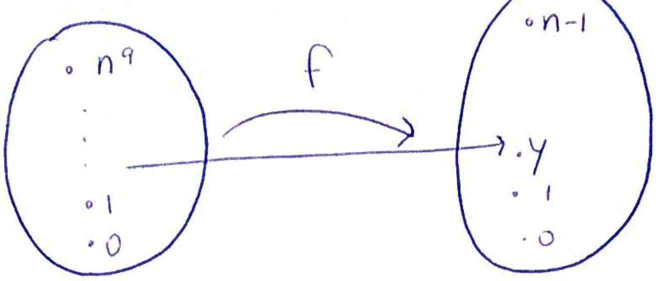
20/12/2019.

Θεωρία Συνόλων

ΑΣΚΗΣΗ Αν $f: n \to n$ επί $\Rightarrow f$ 1-1.

Λύση



Έστω $y \in n = A$ αφού f επί τότε $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A : f(x) = y\} \neq \emptyset$.

Ουσιαστικά θέλω νδο $f^{-1}(\{y\})$ μονοσύνολο $\forall y \in A$.

$\Downarrow$

Το $x \in A$ για τα οποία ισχύει $f(x) = y$ θα είναι μοναδικό.
Άρα $\forall y \in A$ θα $\exists$ μοναδικό x τ.ω $f(x) = y \Rightarrow f$ 1-1.

Έχουμε $y \in n$ και $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.
Θέλουμε να επιλέξουμε $a_y \in f^{-1}(\{y\})$ $\forall y \in n$.

Όμως $A = n$ ~~απ~~ πεπερασμένο $\Rightarrow A$ έχει συνάρτηση επιλογής

$$\Rightarrow \exists F : \underset{\underset{P(n)}{\shortparallel}}{P(A)} / \{\emptyset\} \to A$$

Θέλουμε $\forall y \in n$

$$g(y) = F / f^{-1}(\{y\}) \in f^{-1}(\{y\}) \Rightarrow f(g(y)) = y \quad \forall y \in n.$$

g 1-1 διότι: $\left.\begin{array}{l} \forall y_1 \neq y_2 \\ y_i \in n \\ i = 1,2 \end{array}\right\} \Rightarrow g(y_1) \neq g(y_2)$

Αυτό ισχύει γιατί αν $g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow f(g(y_1)) = f(g(y_2))$
$\Rightarrow y_1 = y_2$ ΑΤΟΠΟ

Άρα έχουμε $g: n \to n$, 1-1 με την ιδιότητα
$g(n) \in f^{-1}(\{y\})$ $\forall n$.

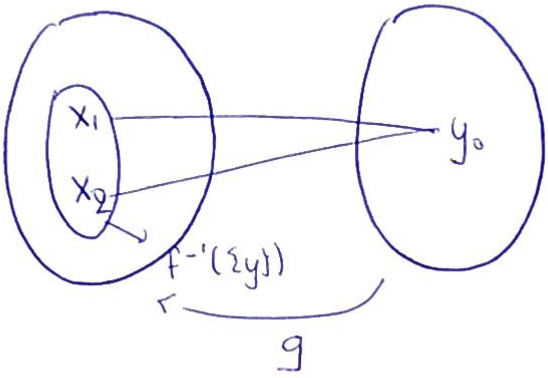
Όμως αφού $g: n \to n$, 1-1 απο προηγ. αποτ. έχουμε g επί
Άρα $g: n \to n$ g: 1-1 g επί $\xRightarrow{\text{ιδιότητα}}$ $g(n) \in f^{-1}(\{y\})$.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ f 1-1

Αποδ

Έστω ότι f όχι 1-1 τότε $\exists\ x_1 \neq x_2 \quad x_1, x_2 \in n$

τ.ω $f(x_1) = f(x_2) = y_0$.



$x_1, x_2 \in \underbrace{f^{-1}(\{y_0\})}_{\text{περιέχει τουλ 2 στοιχεία}} \qquad g(y_0) \in f^{-1}(\{y_0\})$

$\Rightarrow \exists\ z \in \{x_1, x_2\} : g(y_0) \neq z$

$g(y_0) \neq x_1 \Rightarrow x_1 \neq g(y_0) \Rightarrow x_1 \in f^{-1}(\{y_0\})$

Έστω τυχαίο $y \neq y_0$, $y \in n$

$$\left.\begin{array}{l} g(y) \in f^{-1}(\{y\}) \\ x_1 \in f^{-1}(\{y_0\}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 \neq g(y) \\ \forall\ y \neq y_0 \end{array}\right\} (1)$$

$\cancel{x_1 \notin R}$

$x_1 \neq g(y_0)$ (2)

$\left.\right\}$ $g(y) \neq x_1 \quad \forall\ y \in n$

$x_1 \notin R(g) = g(A) = g(n) \Rightarrow g$ όχι επί.

$$f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y_0\}) \overset{y \neq y_0}{=} \emptyset.$$

...τικά κλάδου

Ορισμός Έστω $(V,+,\cdot)$ δ.χ μη πεπερασμένης διάστασης.
Το $A \subseteq (V,+,\cdot)$ θα είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν κάθε πεπερασμένο $B \subseteq A$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Πότε το A παράγει το V δλδ $\langle A \rangle = V$?

Το A παράγει το V όταν: $\forall x \in V \ \exists n \in \mathbb{N}$
$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$ τ.ω $X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$.
$\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in A$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν $(V,+,\cdot)$ δ.χ (όχι απαραίτητα πεπερ διαστασης)
$\exists A \subseteq V$ τ.ω (i) $V = \langle A \rangle$
(ii) A γραμμ ανεξ $\Big\} \Longleftrightarrow$ A βάση του V.

Αποδ

$S = \{A \subseteq V : A \text{ γραμμικό ανεξ}\}$
Το $S \neq \phi$ διότι Αν $A = \{x\}$ τότε $\lambda x = 0 \xrightarrow{x \neq 0} \lambda = 0$
$\Rightarrow A = \{x\}$ γραμμικό ανεξ.

Διατάσσουμε το S ως εξής

$A_1 \leq A_2 \Longleftrightarrow A_1 \subseteq A_2$

$\boxed{\text{Η} \leq \text{ είναι σχέση διάταξης στο S}}$

διότι (1) $A \subseteq A \quad \forall A \in S$
(2) $A_1 \subseteq A_2$ και $A_2 \subseteq A_1 \Rightarrow A_1 = A_2 \quad \forall A_1, A_2 \in S$
(3) $A_1 \leq A_2$ και $A_2 \leq A_3 \Rightarrow A_1 \subseteq A_3 \quad \forall A_1, A_2, A_3 \in S$

Θδο το $(S, \leq)$ έχει μεγιστικό στοιχείο
(θα εφαρμόσουμε το ΛΗΜΜΑ Zorn)

Έστω $C = \{A_i \ i \in I\} \subseteq S$

αλυσίδα στο S που σημαίνει ότι κάθε A_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $\forall i,j \in I \ A_i \subseteq A_j$ ή $A_j \subseteq A_i$

Ψάχνουμε ένα $A \supseteq A_i \ \forall i \in I$, $A = \bigcup_{j \in I} A_j \supseteq A_i$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ A γραμμικά ανεξ.

Αποδ. Αρκεί $\forall$ B πεπερασμένο $\subseteq A \Rightarrow B$ γραμμ. ανεξ.
Έστω ένα τέτοιο $B=\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq A = \bigcup_{j\in I} A_j$

$x_1 \in \bigcup_{j\in I} A_j \Rightarrow \exists\, j_1 \in I$ τω $x_1 \subset A_{j_1}$

$\vdots$

$x_n \in \bigcup_{j\in I} A_j \Rightarrow \exists\, j_n \in I$ τω $x_n \subset A_{j_n}$

Εφόσον $\{A_i,\ i\in I\}$ αλυσίδα στο $S \Rightarrow \exists\, j_k$, $k\in\{1,2,\dots,n\}$ $A_{j_k} > A_{j_i}$ $\forall i=1,2,\dots,n$

Άρα $\forall$ $i=1,2,\dots,n$ $x_i \in A_{j_i} \subseteq A_{j_k}$

$\Downarrow$

$x_1, x_2, \dots, x_n \in A_{j_k}$ γραμμ. ανεξ.

$B=\{x_1, x_2, \dots x_n\} \subseteq A_{j_k}$ —//—

$\Rightarrow B$ γραμμ. ανεξ.

ΛΗΜΜΑ Zorn $\rightarrow$ $\exists\, A \in S$ ($A \subseteq V$, A γρ. ανεξ) ώστε A μεγιστικό

Θδο το A είναι βάση του V

i) $\langle A\rangle = V$

ii) A γρ. ανεξ

i) Έστω $x\in V$ θδο αν $x\in\langle A\rangle$ τότε $\exists\, n\in\mathbb{N}$, $\exists\, \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$, $c_1,\dots,c_n \in\mathbb{R}$

τ.ω. $x=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$.

$x\in V$ i) $x\in A \Rightarrow x=a = 1\cdot a$ για $a\in A$ $\Big\}$ $x\in\langle A\rangle$

ii) $x \notin A$, $\Delta = A \cup \{x\}$? A

Το A όμως είναι μεγιστικό γραμμ. ανεξ.

$\Rightarrow A \cup \{x\}$ δεν είναι γρ. ανεξ $\Rightarrow$

$\exists\, \Gamma \subseteq A \cup \{x\}$, Γ πεπερ. και Γ όχι γρ. ανεξ.

$\Gamma = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$

Αν $\Gamma \subseteq A \Rightarrow \Gamma$ γρ. ανεξ ως πεπερασμένο $\subseteq A$ $\rightarrow$ Ατοπο

$\Rightarrow \Gamma \not\subseteq A$ χωρίς βλάβη γενικότητας $\Longrightarrow x_{n+1} = x$.

$$\Gamma = \{\underset{\substack{\| \\ c_{11}}}{x_1}, \underset{\substack{\| \\ c_{22}}}{x_2}, \dots, \underset{\substack{\| \\ c_{1n}}}{x_n}, \underset{\substack{\| \\ x}}{x_{n+1}}\}$$ όχι γρ ανεξ.

$\Rightarrow \Gamma = \{c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, x\}$ $\quad c_i \in A\ \forall i$

Όμως Γ όχι γρ. ανεξ $\Rightarrow \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$ [όχι όλα μηδέν)

τω $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda x = 0$ (1)

Αν $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 = \lambda$ Ατοπο $\Rightarrow \lambda \neq 0$.

$$(1) \Rightarrow x = \underbrace{-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)}_{\mu_1} c_{11} + \dots + \underbrace{\left(-\frac{\lambda}{\lambda}\right)}_{\mu_n} c_{1n} \Rightarrow x = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n$$

$\Longleftrightarrow x \in \langle A \rangle$.

Ορισμός: A λέγεται αριθμήσιμο αν-ν $A \cong \mathbb{N}$

δηλ $\exists\, f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} A$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> X άπειρο (όχι πεπερασμένο) σύνολο

$\Rightarrow \exists\, Y \subseteq X$ ώστε το $Y \cong \mathbb{N}$

Δηλ. το $\mathbb{N}$ είναι το μικρότερο άπειρο σύνολο.

<u>Αποδ</u>

X άπειρο $\Rightarrow X \neq \emptyset \Rightarrow$ Επιλέγουμε $x_0 \in X$

$X \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

Επιλέγουμε $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$ $\nearrow x_1 \in X$, $\searrow x_1 \neq x_0$

Άρα $X \setminus \{x_0, x_1\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow x_2 \in X \setminus \{x_0, x_1\} \Rightarrow x_2 \in X$ και $x_2 \neq x_1, x_0$

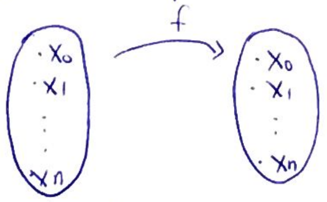
$\forall n \Rightarrow \ldots \Rightarrow \exists\, x_{n+1} \in X \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$\Rightarrow \exists \underbrace{\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\}}_{Y} \subseteq X$ ώστε ανά 2 στοιχεία να είναι διαφορετικά

Άρα ορίζω $f : \mathbb{N} \to X$ $f(n) = x_n$ 1-1

και $f(\mathbb{N}) = Y \subseteq X$

ΠΟΡΙΣΜΑ: X άπειρο $\Rightarrow X \cong X'$ για κάποιο $X' \subseteq X$



Ορίζω $X' = X / \{x_0\}$

$f : X \to X / \{x_0\}$

$f(y) = y \quad , y \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$f(x_0) = x_1$ | f 1-1, επί του $X / \{x_0\}$

$f(x_1) = x_2$

$\vdots$ | $f(X) = X / \{x_0\}$

$f(x_n) = x_{n+1}$

Μήπως $\exists\ B \subseteq X$, άπειρο $X \cong X \setminus B$? (ΑΣΚΗΣΗ)

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Κάθε άπειρο $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι αριθμ. $(A \cong \mathbb{N})$

<u>Αποδ</u>

Ορίζουμε $g : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} A$ ως εξής:

$$g(0) = \min(A)$$
$$g(1) = \min(A / \{0\})$$
$$g(2) = \min(A / \{0,1\})$$
$$\vdots$$
$$g(n+1) = \min(A / \{g(0), g(1), \dots, g(n)\})$$

Η g 1-1 και επί

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω B άπειρο $\subseteq A$ όπου $A \cong \mathbb{N} \Rightarrow B \cong \mathbb{N}$

<u>Αποδ</u> $A \cong \mathbb{N} \Rightarrow \exists\ f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{N}$

Όμως $B \subseteq A$ $\quad f/_B : B \xrightarrow[1-1]{\text{επί}} f(B) \subseteq \mathbb{N}$

$\Rightarrow B \cong f(B) \Rightarrow f(B) \cong \mathbb{N} \Rightarrow B \cong \mathbb{N}$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> Να κατασκευαστεί $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$

<u>Λύση</u>

	0	1	2	3	4	...
0	x	x	x	x	x	
1	x	x	x	x	x	
2	x	x	x	x	x	
3	x	x	x	x	x	
⋮						

$f(n,m) = 2^n \cdot 3^m \subseteq \mathbb{N}$

f: 1-1 διότι $\forall (n,m), (n',m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$f((n,m)) = f((n',m')) \Rightarrow 2^n 3^m = 2^{n'} 3^{m'}$

<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ</u> $n = n'$ και $m = m'$

Αν $n \neq n'$ και έστω $n > n' \Rightarrow 2^{n-n'} = 3^{m'-m}$

αλλά το $2^{n-n'} \geq 2^1 = 1$

$\Rightarrow 3^{m'-m} > 1 \Rightarrow m'-m > 0$, Άρα $n-n' > 0$, $m'-m > 0 \Rightarrow 2/3^{m'-m} \Rightarrow 2/3$ άτοπο

Άρα $n = n'$ $m = m'$